

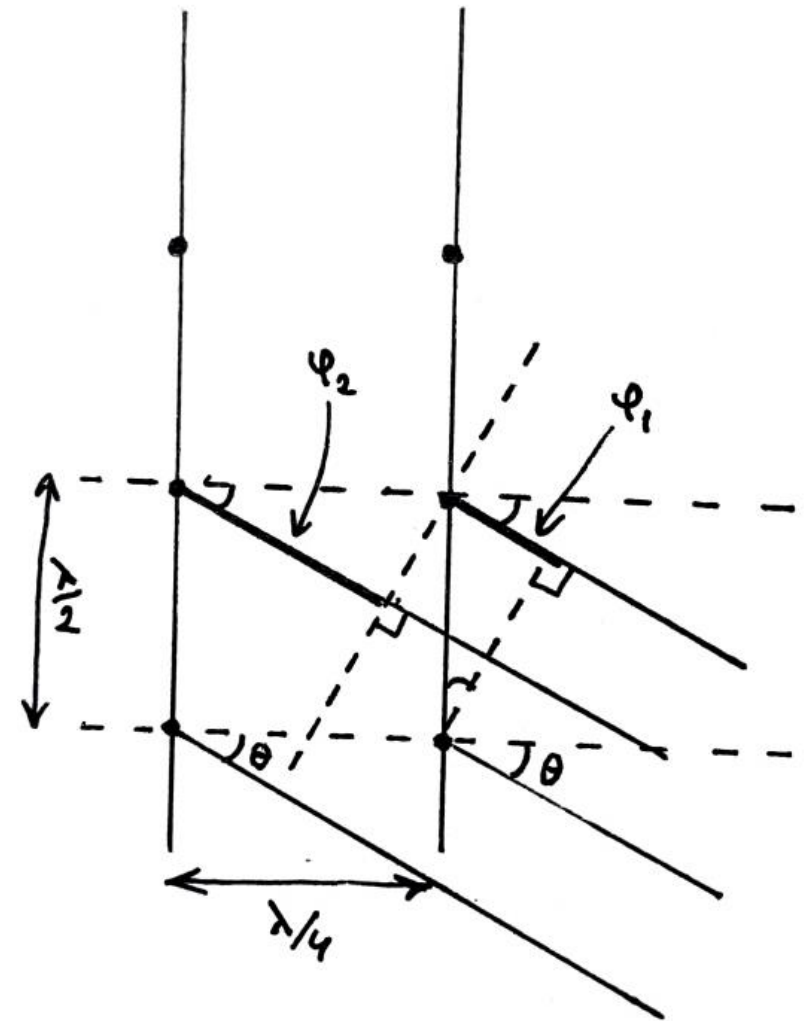
Задача 8.9

Панфилов Андрей

Группа 302

Условие

Точечные монохроматические источники, составляющие антенную решетку, расположены на двух параллельных прямых линиях. Антенна содержит $2N$ источников (N источников на каждой линии). Расстояние между источниками в пределах одной цепочки – $\lambda/2$, а расстояние между цепочками – $\lambda/4$, где λ – длина волны излучения. Излучатели второй цепочки опережает первую по фазе на $\pi/2$. Найти изменение интенсивности в плоскости источников в зависимости от угла θ , отсчитываемого от прямой, перпендикулярной линиям антенной решетки.



Суммарная напряженность

Суммарная напряженность в точке равна сумме напряженностей всех источников:

$$\begin{aligned}E_{11} &= E_0 e^{i(\omega t - kr)} \\E_{12} &= E_0 e^{i(\omega t - kr - \varphi_1)} \\&\dots \\E_{1N} &= E_0 e^{i(\omega t - kr - (n-1)\varphi_1)}\end{aligned}$$

Напряженность от первой цепочки.

φ_1 - Сдвиг по фазе, который происходит, пока волна от соседнего источника на цепочке дойдет до волнового фронта.

$$\begin{aligned}E_{21} &= E_0 e^{i(\omega t - kr - \varphi_2 - \frac{\pi}{2})} \\E_{22} &= E_0 e^{i(\omega t - kr - \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2})} \\&\dots \\E_{2N} &= E_0 e^{i(\omega t - kr - (n-1)\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

Напряженность от второй цепочки.

φ_2 - Сдвиг по фазе, который происходит, пока волна от источника второй цепочки дойдет до волнового фронта.

Суммарная напряженность:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)} \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi_1} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(n\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\pi}{2})} \right)$$

Получение общей формулы

Перепишем:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)} (1 + e^{i(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi_1}$$

Используя формулы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi_1} = \frac{1 - e^{-i\varphi_1 N}}{1 - e^{-i\varphi_1}} = \frac{e^{-\frac{i\varphi_1 N}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi_1}{2}}} \frac{(e^{\frac{i\varphi_1 N}{2}} - e^{-\frac{i\varphi_1 N}{2}})}{e^{\frac{i\varphi_1}{2}} - e^{-\frac{i\varphi_1}{2}}}$$

Известно, что $I \sim |E|^2$

$$|E| = E_0 \cdot 1 \cdot (1 + \cos(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})) \frac{\sin(\frac{N\varphi_1}{2})}{\sin(\frac{\varphi_1}{2})}$$

$$I = I_0 \left(1 + \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi_1}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Подстановка

Учитывая то, что расстояния между источниками в цепочке $d = \frac{\lambda}{2}$, и расстояние между цепочками $l = \frac{\lambda}{2}$, найдем φ_1 и φ_2

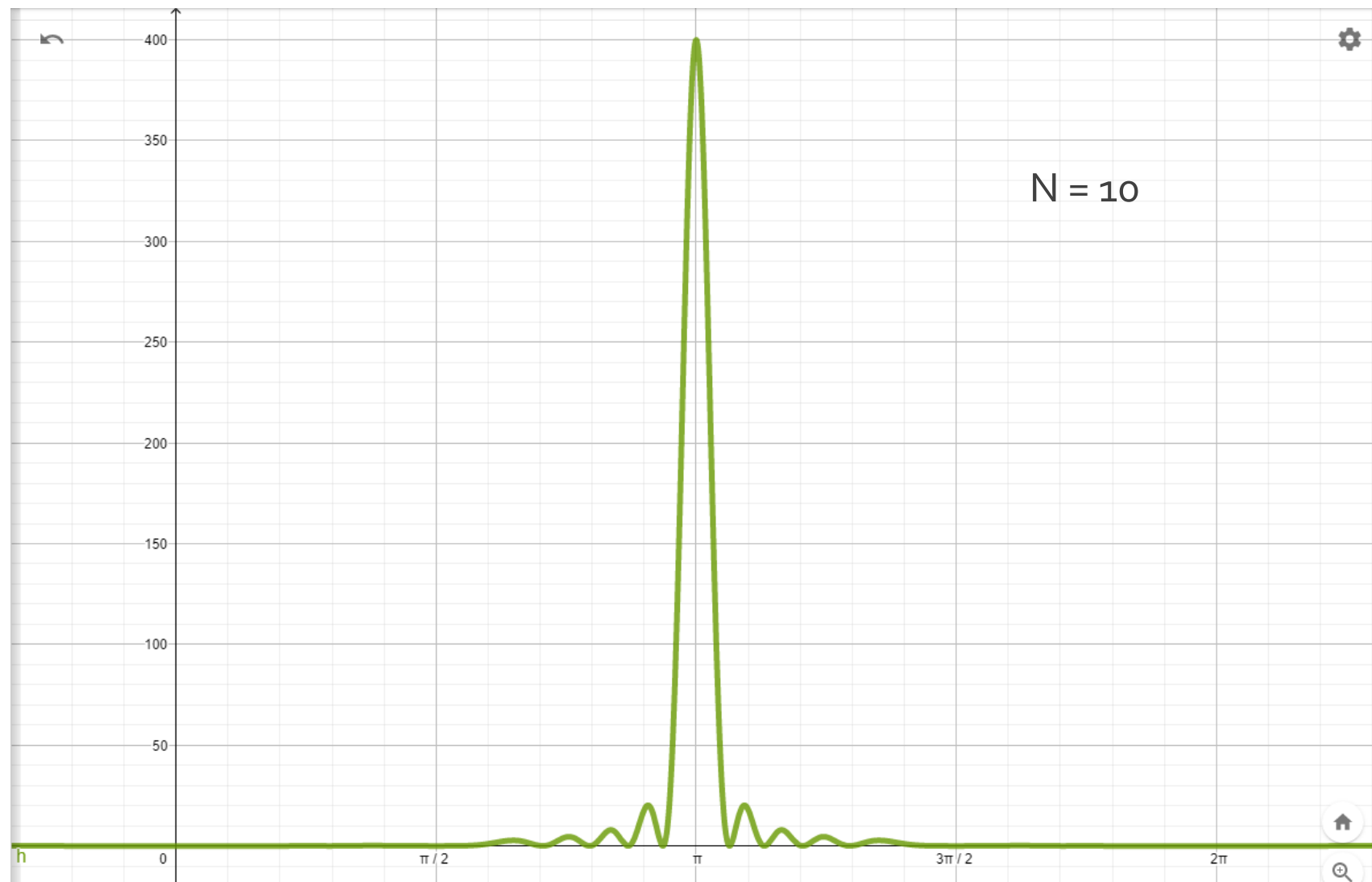
$$\varphi_1 = k \cdot d \sin(\theta) = \pi \sin(\theta)$$

$$\varphi_2 = k \cdot l \cos(\theta) = \frac{\pi \cos(\theta)}{2}$$

$$I = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} (\cos(\theta) + 1) \right) \right)^2 \frac{\sin \left(N \pi \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) \right)^2}{\sin \left(\pi \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) \right)^2}$$

График ИНТЕНСИВНОСТИ

Рассматривая углы от 0 до 2π , максимум будет только при $\theta = \pi$



Так график будет выглядеть в полярных координатах:

